Leçon n° 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et on note $|| \cdot ||$ sa norme associée et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I/ Endomorphismes d'un espace euclidien.

A/ Adjoint d'un endomorphisme. [ROM]

Théorème 1 : Existence et unicité de l'adjoint.

Proposition 2 : Matrice du produit scalaire.

Proposition 3 : Propriétés de l'adjoint.

B/ Exemples d'endomorphismes remarquables. [ROM]

Définition 4 : Isométries.

Proposition 5 : u isométrie si et seulement si u est linéaire et conserve la norme.

Exemple 6 : Les homothéties qui sont des isométries sont $\pm Id$, les symétries orthogonales et rotations sont des isométries, les valeurs propres des isométries ne peuvent qu'être ± 1

Proposition 7 : Matrice orthogonale et lien avec adjoint pour isométrie.

Définition 8 : Endomorphismes symétriques et antisymétriques.

Proposition 9 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\frac{u+u^*}{2} \in \mathrm{S}(E)$ et $\frac{u-u^*}{2} \in \mathcal{A}(E)$.

Définition 10 : Endomorphismes normaux.

Exemple 11 : Les isométries, auto-adjoints sont normaux.

Proposition 12 : Caractérisation matricielle des différents endomorphismes dans une BON.

II/ Cas des endomorphismes normaux. [ROM]

Lemme 13 : Si F stable par u normal alors $F^{\perp}$ stable par u.

Lemme 14 : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ normal, $\exists P$ de dim 1 ou 2 u-stable.

Développement 1

Théorème 15 : Réduction des endomorphismes normaux.

Application 16 : Réduction des endomorphismes antisymétriques.

III/ Étude des endomorphismes autoadjoints/symétriques.

A/ Premières propriétés. [ROM]

Proposition 17 : Dimension de $S(E)$ et $\mathcal{A}(E)$.

Définition 18 : Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs.

Exemple 19 : La matrice du produit scalaire est définie positive.

Proposition 20 : Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(S) \subset \mathbb{R}$.

Lemme 21 : Les sous-espaces propres sont orthogonaux.

B/ Autour du théorème spectral. [ROM] [CAL]

Théorème 22 : Théorème spectral.

Corollaire 23 : Si $u \in S(E)$ caractérisation de la positivité de u selon la positivité des valeurs propres.

Application 24 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$.

Application 25 : Existence racine carrée pour les positives.

Proposition 26 : Critère de Sylvester : $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si les mineurs principaux de A sont tous strictement positifs.

Corollaire 27 : $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Développement 2

Théorème 28 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Application 29 : $S \mapsto \sqrt{S}$ est un homéomorphisme dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV/ Endomorphismes orthogonaux.

A/ Réduction et structure de groupe. [ROM]

Proposition 30 : u isométrie si et seulement si elle envoie toute BON sur une BON.

Théorème 31 : Réduction des isométries.

Proposition 32 : $O(E)$ sous-groupe de $\mathcal{L}(E)$.

Définition 33 : Symétries orthogonales, réflexions, renversements.

Théorème 34 : $O(E)$ est engendré par les réflexions et $SO(E)$ par les renversements.

B/ Propriétés topologiques. [ROM] [CAL]

Proposition 35 : $O(E)$ compact de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 36 : Les composantes connexes de $O(E)$ sont $SO(E)$ et $O^-(E)$.

Théorème 37 : Décomposition polaire.

Application 38 : $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Application 39 : Le seul sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$.

Références :

— [CAL] Caldéro Histoires Hédonistes tome 1 p. 201 et p. 208

— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 713-747